

## 数学的モデルによる動脈圧 波波形の解明

## Theoretical consideration on the formation of the pressure wave contour in the arterial system with the mathematical model

増田 善昭  
福島 一也  
小沢 俊  
宿谷 正毅  
平井 昭  
稲垣 義明  
倉田 是\*

Yoshiaki MASUDA  
Kazuya FUKUSHIMA  
Shun OZAWA  
Masaki SHUKUYA  
Akira HIRAI  
Yoshiaki INAGAKI  
Tadashi KURATA\*

### Summary

The study was designed to clarify the formation of the arterial pressure wave and its deformation on a transmission line through the arterial system. For this purpose the wave form produced in various theoretical model for the arterial circulation was computed and was compared with the actual arterial pressure wave by a catheter-tip microtransducer or the arterial pulse wave recorded extracorporally.

The basic vascular models consisted of the elastic tubes with different diameter and length that were connected with each other in series. Model 1 is a single elastic tube, model 2, two elastic tubes and model 3 three elastic tubes. Other variables governing the system were pulse wave velocity (PWV), reflection coefficient (K), attenuation constant ( $\beta$ ) and input wave form. The latter is either triangular or sine waves, or the actual flow wave pattern at the root of the aorta.

1. The theoretical wave form produced by a triangular wave as an input wave.

Model 1-0 is shown in the left upper part of Fig. 1, where  $X_0$  is at the proximal end,  $X_1$  at the distal end,  $X_{1/2}$  the midpoint of the system with the length of  $L$ .  $K_0$  and  $K_1$  represent the reflexion coefficients at  $X_0$  and  $X_1$  respectively. The triangular wave, of which duration, i.e. the ejection period, was 0.3 sec and peak was on the first 0.1 sec, was used as an input wave. If such a wave be successively put

千葉大学医学部 第三内科  
千葉市亥鼻 1-8-1 (〒 280)  
\* 同 工学部電子工学科  
千葉市弥生町 1-33 (〒 280)

The Third Department of Internal Medicine, Chiba  
University School of Medicine, Inohana 1-8-1,  
Chiba, 280

\*The Department of Electronic Engineering, Chiba  
University Faculty of Engineering, Yayoicho 1-33,  
Chiba, 280

from  $X_0$  into the system with the interval of 1 sec, the group of the triangular waves will be produced along the model as shown in the right of Fig. 1. The waves indicated by the dotted line represent those of each travelling wave to and fro through the system and summation of these waves at several points is shown by the solid line.

The procedure mentioned above was applied to the model 2-0 and 3-0 but with different parameters. The resultant wave forms computed by a Melcon 9100/30F digital computer are shown in Fig. 3 and 4. The resultant wave form at several points became more resemble to the actual one with increasing numbers of the connecting tubes.

2. The theoretical wave form produced by a flow pattern as an input wave.

Much similarity was obtained when the flow pattern recorded at the aortic root by an electromagnetic flowmeter was applied for the input wave. This is illustrated in Fig. 5. As the dependence of  $K$ ,  $\beta$ , and PWV on the frequency was not taken into consideration in this experiment, the computed waves had the small high frequent components on it. Such high frequency waves should be damped out because the attenuation becomes progressively larger as the frequency increases. The wave forms drawn by the solid line was almost similar to those obtained by the microtransducer in normal subject, where the steeping and peaking phenomena, percussion wave, the tidal wave and the dicrotic wave were clearly seen.

3. The quantitative assessment of the pressure wave.

As any pressure pulse can be expressed as a function of frequency,  $P(\omega)$ , the attenuation at each frequency,  $A(\omega)$ , is given by the ratio  $P_0(\omega)/P_x(\omega)$  for that frequency, where  $P_0(\omega)$  is the pressure pulse at the proximal end and  $P_x(\omega)$  is the pulse at the distal site. As shown in Fig. 6, for each frequency this function is plotted in the complex plane, where the abscissa represents the real part and the ordinate the imaginary part of the function. Comparing such attenuation plots (Umformungsortskurve) for the aortic pressure pulse in normal subject with that for the model 3-0 (Fig. 7), the curve at  $X_1$  in the model may correspond to the aortic arch or the carotid artery,  $X_{1\frac{1}{4}}$  the upper abdominal aorta,  $X_2$  the iliac or femoral artery and  $X_3$  the dorsal pedic artery.

4. Effects of the parameters upon the pressure wave.

There is a possibility to estimate the characteristic changes in the pressure wave form with various pathologic conditions from such model experiment. Some of the examples is shown in Fig. 8. With increase in pulse wave velocity as shown in the second column of the figure, systolic pressure elevated, diastolic pressure lowered and the dicrotic wave became smaller. Such changes is familiar to in the atherosclerosis of the large arteries. The characteristic wave form commonly seen in hypertension was able to produced in model 3-2 with high reflexion coefficients at the junctions  $X_2$  and  $X_3$ .

The results indicated the usefulness of the model experiment to explain the pattern formation of the pressure wave during its transmission and the characteristic changes of the wave seen in the various cardiovascular conditions.

**Key words**

arterial pressure wave

pressure wave transmission

arterial model  
 pulse wave velocity  
 wave reflexion

はじめに

近年、カテ先 microtransducer の発達に伴い、動脈系の種々の場所における圧波が、時間的な遅れなく正確な波形で記録できるようになった。一方、特性の良い脈波計を使用し、一定の条件のもとで記録した体外性脈波は血管内圧波の波形ときわめて類似し、脈波は相当する動脈の側圧波を記録しているものと考えられるが<sup>1)2)</sup>、末梢動脈脈波

を記録すれば、大動脈カテーテル法では得られない、より細い動脈の圧波の波形変化も推定することができる。

このように、圧波の伝播に伴う変化は臨床的に比較的得やすい情報であり、この変化を観察することにより動脈系の種々の性質を解明することが可能であるにもかかわらず、今日、これらの点についての臨床的研究はあまり進んでいない。<sup>1)</sup> そ

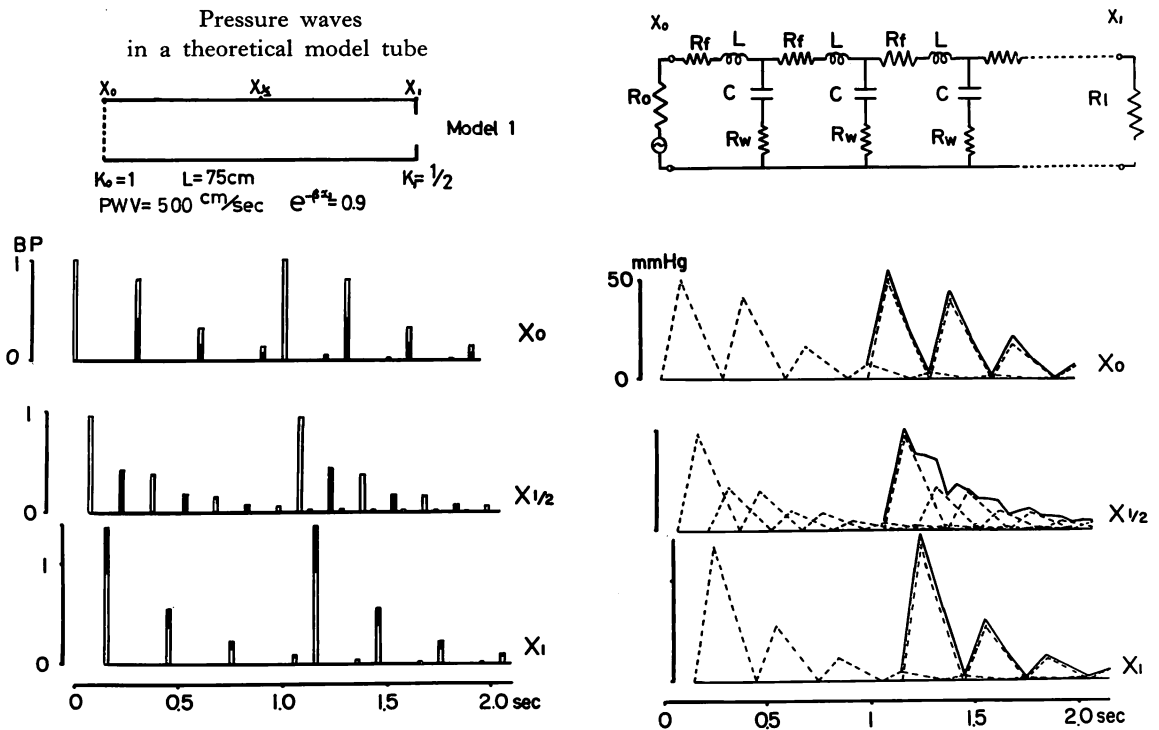


Figure 1. Model 1-0

Left upper: scheme of the model tube.

L: length of the tube,  $X_0$ : central end,  $X_{1/2}$ : middle point of the tube,  $X_1$ : peripheral end, PWV: pulse wave velocity,  $\beta$ : attenuation constant,  $K_0$ : reflexion coefficient at central end,  $K_1$ : reflexion coefficient at peripheral end.

Left lower; transmission of two spike-like waves in the model.

Right upper; equivalent electrical circuit.

Right lower; transmission of triangular wave in the model.

ここで、われわれは動脈圧波形の成因、およびその伝播による波形変化を解明するために、digital computer を使った理論的・数学的モデルの試作をし、血管モデルによる圧波の伝播の様相を観察し、これを実際の動脈圧波形、または体外性に得た脈波波形と比較したので報告する。

方法

血管モデルとして、長さ  $L$ 、波の伝播速度  $PWV$ 、末端での反射係数  $K$ 、伝播に伴う波の減衰率  $\beta$  の異なる種々の弾性管を考え、1本の管よりなるものをモデル1、異なった性質の2本の管を直列につないだものをモデル2、3本の管を直列につないだものをモデル3とし、これら3種のモデルについて、三角波、血流波、Sin 波を原波形として入れ、種々の条件下でこれらの波形がモデル管を伝播するにつれてどのように変形するかをみた。

圧波形算出方法は他の論文<sup>3)</sup>に述べているので、ここでは簡単に説明する。Figure 1 の左上のような条件のモデル 1-0 を考える。ここで  $X_0$  は管の中枢端、 $X_1$  は末梢端、 $X_{1/2}$  は管の中間点、 $L$  は管の長さ、 $K_0$  は中枢端の反射係数、 $K_1$  は末梢端の反射係数、 $PWV$  は波の進行速度、 $\beta$  は減衰定数で、 $e^{-\beta x} = 0.9$  は中枢端で高さ1の波が末梢端に到達した時には0.9に減衰していることを示している。このモデル管に左下のような棒状の圧波を原波形として入れると、波は末梢へ伝わり、次第に振幅を減少し、0.15秒後に振幅0.9となって末梢端  $X_1$  に到達する(図の白棒)。この点では進行波の  $K_1 = 1/2$  が反射され、白棒の進行波と黒棒の反射波の合計は原波形より高くなる。次に、反射波は管を逆方向に伝わり、 $X_0$  に到達し、そこで全反射され、再び末梢へ戻って行く。このようにして棒状の圧は時間の経過と共に管を行ったり来たりしながら、次第に低くなって行くが、1秒毎に新しい波が入って来る状態を考えると、ここでは新しい高い波と古い低い波が混在するようになる。

原波形として Figure 1 右下のように持続時間

(駆出時間)0.3秒で、最初の0.1秒に最大振幅(50 mmHg)を持つような三角波を入れると、棒状の波と同様にまず点線で示した三角形の波の群が得られる。この各波を重ねて合成したものが実線の波で、モデルに三角波を入れた時に管内の  $X_0$ 、 $X_{1/2}$ 、 $X_1$  の各点に実際に生ずる圧波形を示している。この際、中枢端での圧は 53/0 mmHg、末梢端での圧は 70/0 mmHg となるが、原波を入れる前のモデル管本来の内圧を 50 mmHg とすると、それぞれ 103/50、120/50 mmHg となって実際の動脈系の圧変動とほぼ一致する。

以上の波形算出は算術計算で行なったものであり、2管・3管モデルについても同様な操作で算出可能である。この際第2管に進入する波は第1

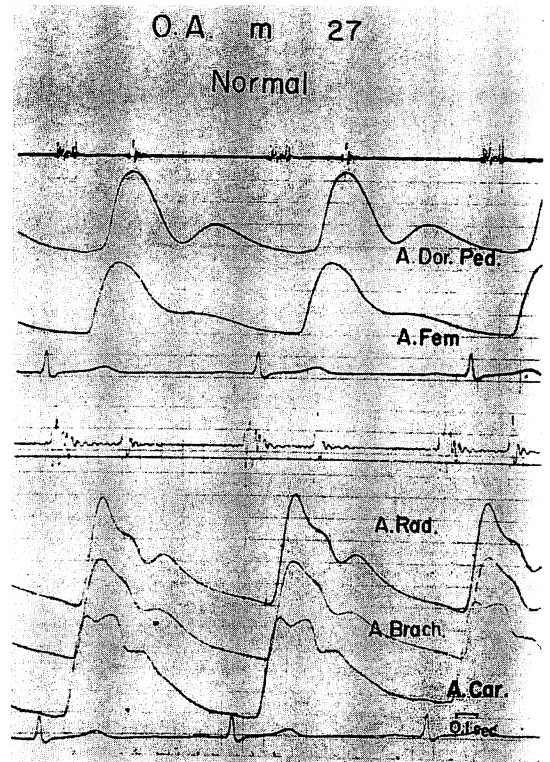


Figure 2. The external pulse waves in a young normal.

管の未梢端の進行波と反射波を合計したものであり、また、2管目以後の反射波が中枢方向に戻って行く時の接合部の反射係数は進行波の反射係数の負の値になることに注意しなければならない。Computer を利用すれば計算の煩雑さから開放さ

れる。われわれは digital computer (Melcom 9100/30 F) を使用し、計算結果は X-Y plotter により波形描記を行わせている。

モデル管の圧波と比較のため使用した圧波は、教室で開発したカテ先 microtransducer を使用し

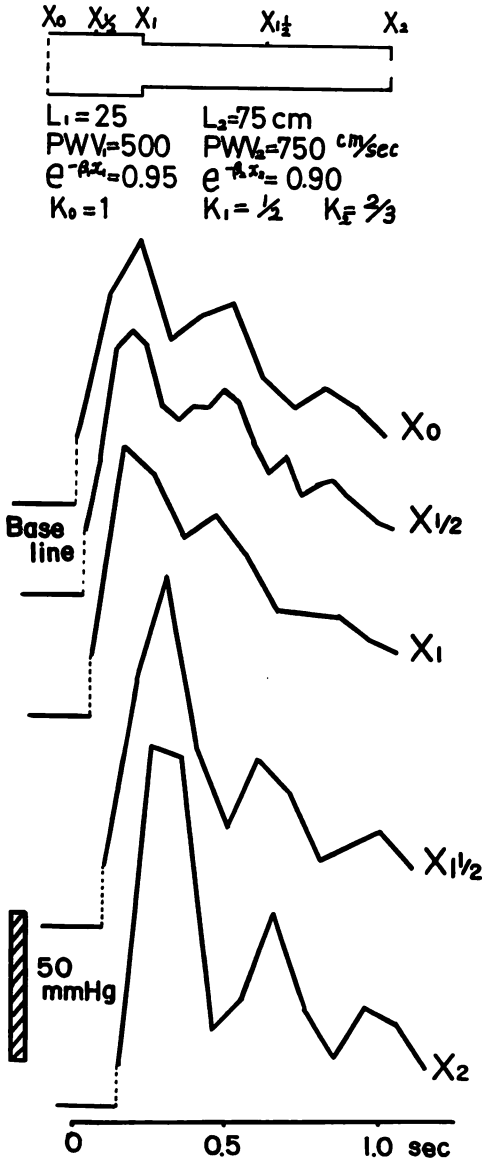


Figure 3. Pressure pulse wave in the model 2-0. Input wave: triangular wave.

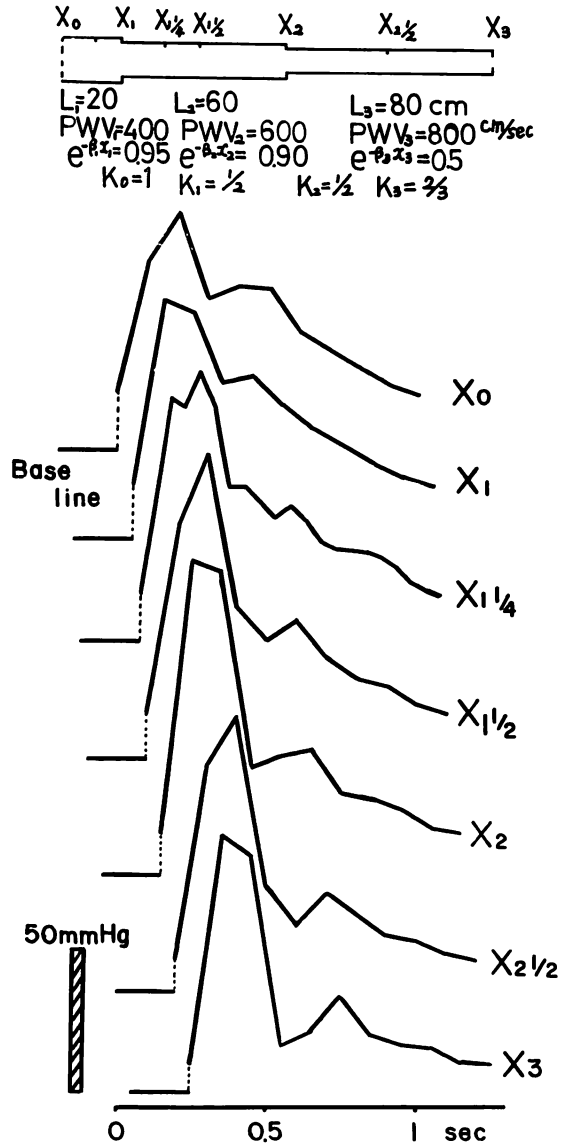


Figure 4. Pressure pulse wave in the model 3-0. Input wave: triangular wave.

て得たもので<sup>4)</sup>, 逆行性大動脈カテーテル法により大動脈弁基部より腸骨動脈まで, ほぼ 10cm 間隔で記録したものである (Figure 5 右). また, カテーテルを挿入できない頸動脈, 大腿動脈, 足背動脈などについては, Infraton 脈波計<sup>5)</sup> により体外性に記録した脈波波形 (Figure 2) と比較を行った.

成績

1. 三角波を使ったモデル

前述した三角波の圧波をモデル内に 1 秒毎に入れた時, 管の長さ, 伝播速度, 反射係数, 減衰率をいろいろ変え, モデル管の圧波が実際の健康者の圧波にできるだけ近くなるような条件を設定した. このようにして得たモデル 1-0, 2-0, 3-0 の条件とその際のモデル管内の圧波形は Figure 1, 3, 4, に示すごとくであり, 接続する管数がふえるにつれ, 実際の大動脈圧波や末梢脈波に似てきた.

2. 血流波を使ったモデル

モデルに入れる原波形として, 血流波を使うとさらに良い類似が得られた. Figure 5 はモデル 3-0 に図の中央の電磁血流計で得た大動脈基部の血流波と同形の圧波を入れた場合で, 左の点線で示した圧波が得られる. 今回のモデル研究では反射, 減衰, 伝播速度に対する周波数の影響を考えたが, 中等大までの動脈系では高周波の波

ほど伝播に伴う減衰が大きいので<sup>6)</sup>, 実際にはぎざぎざな高周波成分の変動が消え, 実線で示した滑らかな波形が得られると考えられる. この波と

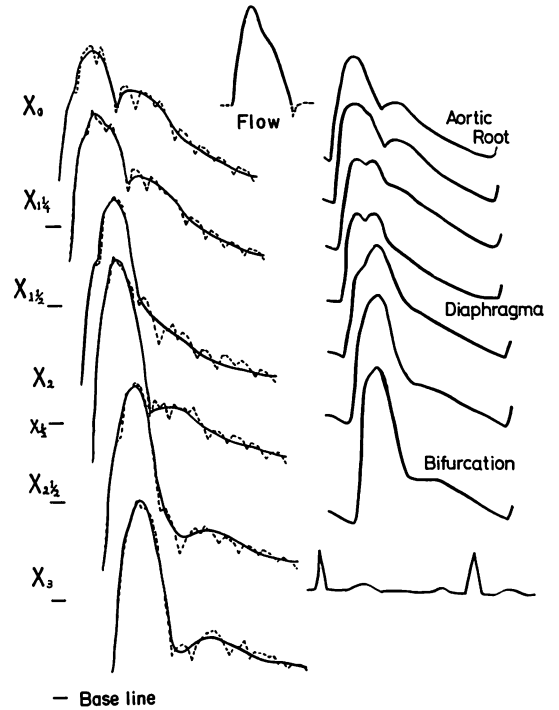


Figure 5. Theoretical pressure waves and actual aortic pressure waves. Left: pressure wave in the model 3-10. Input wave: flow wave at the aortic root. Right: Serial aortic pressure wave in a young normal.

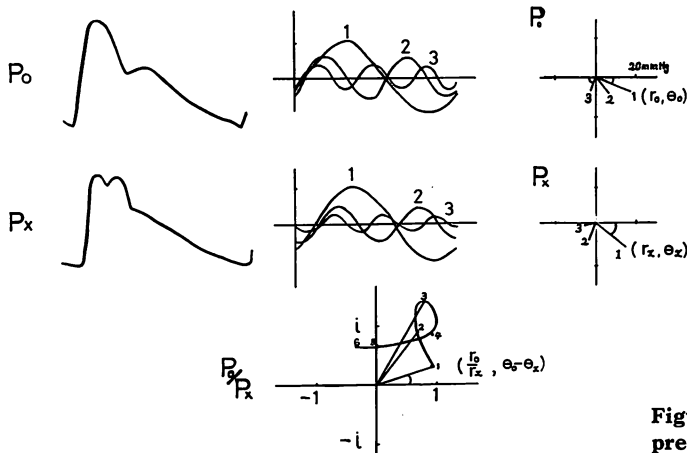


Figure 6. Method for locus plots of pressure attenuation ( $P_0/P_x$ ).

右の健康者の大動脈圧波を比較すると, steepening, peaking 現象, percussion wave, tidal wave, dicrotic wave などの小波の態度についてもかなりの類似が得られるようにみえる。

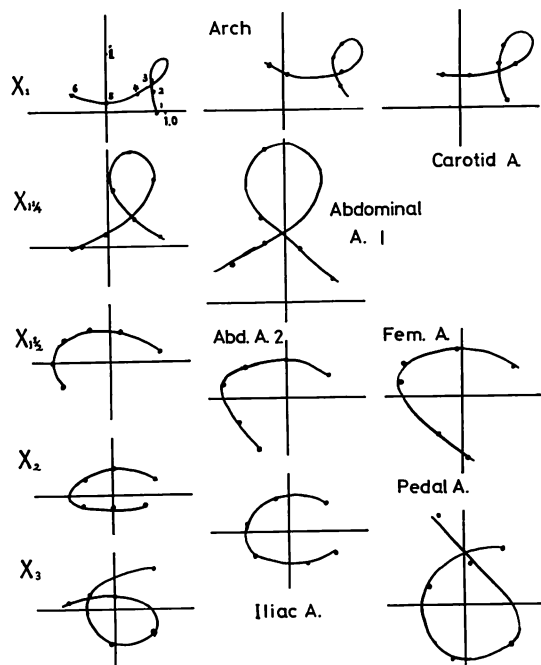
### 3. 伝播による波形変化の定量化

中枢端の圧波 ( $P_0$ ) からみた管の X 点における圧波 ( $P_x$ ) の変化 ( $P_0/P_x$ ) を周波数毎に複素数座標に図示し, attenuation plots (Umformungs-ortskurve) を作成することにより, 波形の伝播に伴う変化を定量的に観察できる。曲線作成の方法は詳細を他書<sup>7)8)</sup>に譲るが, **Figure 6** のように, 実際の圧波については Fourier 解析により圧波を心周期の整数倍の振動数を持つ sin 波,  $P_n = r_n \cdot \sin(\omega t + \theta_n)$  に分解し, それぞれの振動数における中枢端と X 点の圧波の比  $p_0/p_x$  を複素数座標の極形式で現わすと,  $(r_0/r_x, \theta_0 - \theta_x)$  の点で示され, 振動数の順で点をつなぐことにより曲線を得ることができる。モデル管では Fourier 解析の代りに一

定の周波数を持った sin 波を管内に入れ, その伝播による振幅と位相角の変化を算出することにより, 同様な曲線が得られる。このようにして得た健康者の大動脈圧波および脈波の attenuation plots をモデル 3-0 のそれと比較してみると **Figure 7** のようになり, モデルの  $X_1$  は大動脈弓部または頸動脈に,  $X_{1/4}$  は腹部上部大動脈に,  $X_2$  は腸骨動脈または大腿動脈に,  $X_3$  は背足動脈の曲線にほぼ一致した。

### 4. モデル条件による波形変化

これまでは正常の血管モデルについて考えて来たが, モデル条件を変えることにより, 病態での圧波の特徴が判って来る。例えば, モデル 3 で条件を変えて管内の圧の波変化を検討すると **Figure 8** のように種々の圧波が得られる。脈波伝播速度をモデル 3-0 の 1.5 倍にしたモデル 3-1 では, モデル 3-0 に比べて収縮期圧は上昇し, 拡張期圧は低下し, dicrotic wave は小さくなり, 動脈硬化の波形と類似する。モデル 3-2 は第 2 管および第 3 管の末梢端の反射係数を大きくしたもので, 得られる圧波は正常より収縮期圧も拡張期圧も高く, tidal wave, dicrotic wave は大きい。これは高血圧症の圧波の simulation のため作ったモデルであるが, 実際の高血圧では脈管の弾性率も高くなり, 圧波の伝播速度が早くなるので, モデル 3-1 とモデル 3-2 の中間の波形になると考えられる。



**Figure 7.** The locus plots of attenuation ( $P_0/P_x$ ) for the model 3-0 and a normal arterial system.

### 考案

動脈圧波および一種の側圧波と考えられる動脈脈波の波形は, 左室収縮による血液駆出とそれを受け入れる動脈系の性質により決定されるが, このような循環系の状態を調べるため, 古くからいろいろのモデルが考えられている。O. Frank の Windkessel モデルはその最初のものであり, 大動脈基部からほぼ背足動脈部までの長さの均一な性質の弾性管で表わされる。氏は単純化のため, 壁粘性や血流摩擦抵抗による波の減衰を省略しているが, 実際にはこれを無視することはできない。

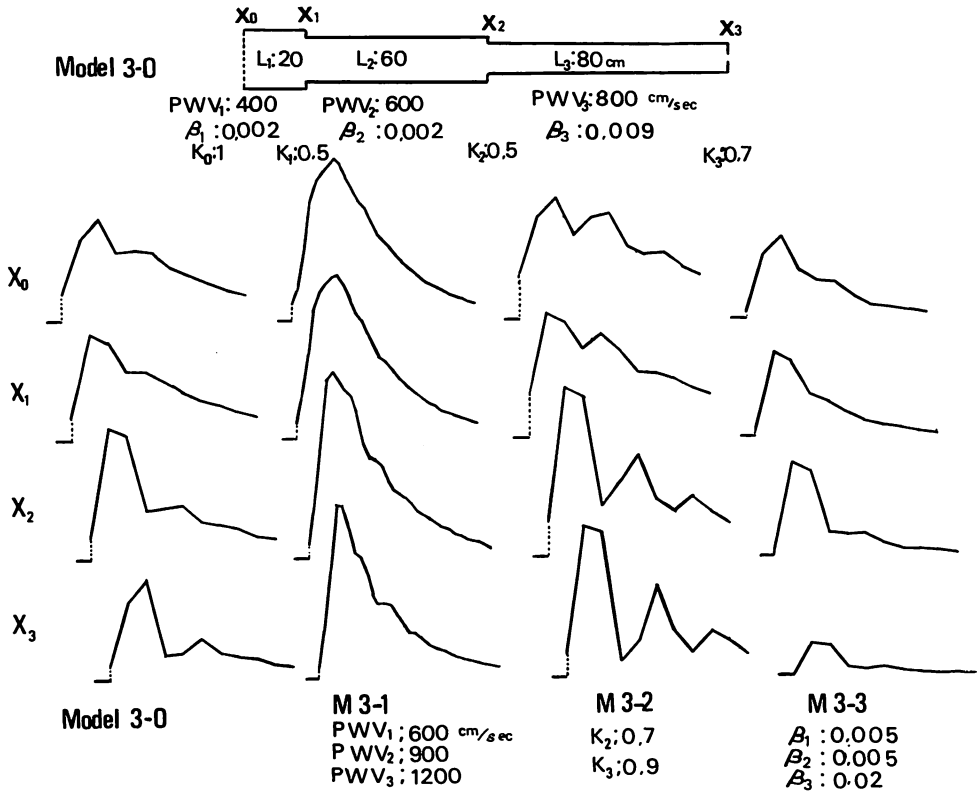


Figure 8. Pressure waves under various conditions in the model 3.

M3-1, PWV<sub>1</sub>: 600 cm/sec, PWV<sub>2</sub>: 900 cm/sec, PWV<sub>3</sub>: 1200 cm/sec.

M-3-2. K<sub>2</sub>: 0.7, K<sub>3</sub>: 0.9.

M-3-3.  $\beta_1$ : 0.005,  $\beta_2$ : 0.005,  $\beta_3$ : 0.02.

Other parameters are the same as in the model 3-0.

モデル 1-0 は Frank の Windkessel モデルにこのような彼の減衰を加味したものであるが, 1本の弾性管モデルでできる圧波は Figure 1のごとくある程度実際の圧波に似るにもかかわらず, 管の中央に波の節が, 管の両端に波の腹が来ることになり, 動脈系の中樞から末梢へかけて次第に脈圧が増大して行く現象を説明できない。近年, 電氣的または物理的血管モデルの作成が盛んであるが, モデルの圧波について伝播に伴う波形変化を実際の大動脈圧波と比較したものは少ない。<sup>9)</sup> われわれのモデルは Wetterer ら<sup>8)</sup> の 2 管連結モデルを 3 管連結モデルとし, 実際の大動脈圧波や末

梢動脈脈波と比較して, 各管の条件を定めたものであるが, これにより大動脈基部から足背動脈部までの正常および病的状態の圧波の良い類似を得ることができた。

### 結 論

動脈圧波および脈波の成因を解明するため, 理論的数学的血管モデルを考え, computer を使用してモデル管内の圧波の伝播に伴って起こる波形変化を検討した。実際の圧波や脈波と良く類似する圧波形は 2~3 個の異なった弾性管を直列につないだモデルで得られ, モデル条件を変えること



により種々の疾患の特徴的波形の脈管学的原因を推定することができた。

#### 文 献

- 1) 増田善昭, ほか: 動脈壁の脈波と脈管内圧波との比較および Fourier 解析への応用. 脈管学 8: 231, 1967
- 2) 斎藤十六, 宇佐美暢久, 増田善昭, 平井昭, 栗原伸夫: 動脈系におけるいわゆる定量化に関する諸問題(その 3)一脈波を使って循環分析を定量化すること. 呼吸と循環 16: 69-77, 1968
- 3) 増田善昭, 福島一也, 小沢 俊, 宿谷正毅, 平井昭, 稲垣義明: 動脈圧波波形の成因について一理論的モデルによる考察. 脈管学 14: 613-616, 1974
- 4) 谷口寿雄: 循環器学における ME の応用. 千葉医学会誌 43: 564-593, 1967
- 5) Brecht K, Boucke H: Neues elektrostatisches Tiefmikrophon und seine Anwendung in der Sphygmographie. Pflügers Arch ges Physiol 256: 43-54, 1952
- 6) McDonald DA: Blood Flow in Arteries. Arnold, London, 2nd ed, 1974
- 7) Attinger EO: Pressure transmission in pulmonary arteries related to frequency and geometry. Circulat Res 12: 623-641, 1963
- 8) Wetterer E, u Kenner Th: Grundlagen der Dynamik des Arterienpulses, Springer, Berlin, 1968
- 9) Bergel DH: Cardiovascular Fluid Dynamics. Vol 1 & 2, Academic Press, London, 1972